مقدمه

اگر مهندسی سازه را متشکل از دو بخش تحلیل و طراحی بدانیم، سرسلسله بخش تحلیلی تئوری الاستیسیته می باشد. لذا آشنایی و تسلط بر این درس برای هر مهندس سازه لازم و ضروری است. با توجه به این نکته، تئوری الاستیسیته یکی از دروسی است که به دانشجویان رشته های مهندسی، بالاخص دانشجویان عمران با گرایش سازه در دوره کارشناسی ارشد تدریس می شود. یکی از نیاز هایی که در این حوزه مشاهده می شد، نبود مجموعه ای مدون از حل مسائل کاربردی و مناسب از این درس بود. مولفین این مجموعه با تجربه موفقی که از تالیف کتاب حل مسائل اساسی دینامیک سازه (که پاسخ سوالات چند مرجع معتبر این درس را ارائه می کرد) به دست آوردند، بر آن شدند که این بار حل مسائل چند مرجع مهم درس تئوری الاستیسیته را ارائه نمایند. با توجه به مراجعی که در کشورمان برای این درس تدریس می شوند دو کتاب تئوری الاستیسیته تالیف چن (ترجمه دکتر محمود یحیایی) و کتاب تئوری الاستیسیته تالیف دکتر محمد مهدی سعادت پور به این منظور انتخاب شدند. کتاب حاضر در سه بخش تالیف شده است، بخش اول حل مسائل کتاب دکتر سعادت پور، بخش دوم حل مسائل کتاب چن و در نهایت در بخش سوم که به عنوان پیوست ارائه می شود،چند تمرین اضافی حل شده است. لازم به ذکر است،حل آن دسته از سوالات که در محدوده نظام آموزشی کشورمان تدریس می شوند،در این کتاب آورده شده است. در آخر ضمن تشکر از تمامی عزیزانی که ما را در تهیه و چاپ این کتاب یاری کردند از تمامی دانشجویان و خوانندگان گرامی تقاضا می شود که نظرات و انتقادات خود را به نشانی زیر ارسال نمایند .

با تشکر

تابستان 1389

مولفین

Amir_saedi_d@yahoo.com

مقدمه (چاپ دوم)

استقبال فوق العاده دانشجویان و دانش پژوهان عزیز از چاپ اول این مجموعه نشان دهنده این مسئله بود که در جامعه علمی کشورمان خلاء چنین کتاب هایی به شدت احساس می شود. این مساله موجب شد که نویسندگان در کمترین زمان ممکن چاپ دوم کتاب را آماده نمایند. اگرچه به دلیل زمان اندک بین چاپ اول و دوم فرصت کافی برای تغییرات عمده در کتاب وجود نداشت، ولیکن در همین زمان نیز چاپ دوم کتاب در دو قسمت بهبود یافته است. اول آنکه در چاپ اول سوالات فصل دوم کتاب چن (ترجمه محمود یحیایی) پاسخ داده نشده بودند که در کتاب حاضر پاسخ این سوالات اضافه شده است. نکته دوم آنکه بخش سوم کتاب که تعدادی مسئله جدید را از مراجع مختلف ارائه می نمود تقویت شده و تعداد دیگری از مسائل کاربردی و نکته دار در چاپ جدید اضافه شده اند. لازم است از سرکار خانم مریم دلبخواه که زحمت ویراستاری علمی و ادبی چاپ دوم کتاب را برعهده داشتند کمال تشکر را به عمل آوریم.

در انتها مجددا از حمایت و توجه کلیه دانشجویان و خوانندگان عزیز تشکر نموده و امید است که کتاب حاضر بتواند گوشه ای هر چند اندک از نیاز های ایشان را در این حوزه برآورده نماید.

با تشکر

زمستان 1390

مولفین

Amir_saedi_d@yahoo.com

فهرست :

مقدمه

بخش اول

حل مسائل کتاب :

(مبانی تئوری الاستیسیته   تالیف: دکتر سعادت پور)

فصل اول : آنالیز تنش 1

فصل دوم : آنالیز کرنش 31

فصل سوم :معادلات بنیادی 53

فصل چهارم : معادلات الاستیسیته برای مواد ایزوتروپیک و فرمول بندی مسائل دو بعدی 69

فصل پنجم : حل مسائل دو بعدی 83

فصل ششم : مسائل الاستیسیته در دستگاه منحنی الخط 97

فصل هفتم : پیچش 107

بخش دوم

حل مسائل کتاب :

(تئوری الاستیسیته و مدلسازی رفتار مواد   تالیف: **W.F.Chen   A.F.Saleeb)**

فصل دوم: آنالیز تنش 113

فصل سوم : آنالیز کرنش 125

فصل چهارم : روابط الاستیک تنش-کرنش 143

بخش سوم

پیوست 165

1-1) وضعیت تنش در نقطه ای از جسم تحت تنش چنین است:

$$\begin{bmatrix} 15 & -5 & 0 \\ -5 & 20 & 10 \\ 0 & 10 & 18 \end{bmatrix} kN/cm^2$$

مطلوبست تعیین:

الف) بردار تنش در روی سطوح عمود بر محورهای مختصات.

ب) بردار تنش بر روی سطوح موازی سطح $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

ج) مولفه های بردار تنش برای همان سطح تنش قسمت ب.

د-مولفه های عمودی و مماسی تنش بر روی سطحی با بردار یکه $n\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

حل:

الف)

$$\overset{i}{T} = \sigma_{1j} e_j = \sigma_{11} e_1 + \sigma_{12} e_2 + \sigma_{13} e_3 = 15i - 5j$$

$$\overset{j}{T} = \sigma_{2j} e_j = \sigma_{21} e_1 + \sigma_{22} e_2 + \sigma_{23} e_3 = -5i + 20j + 10k$$

$$\overset{k}{T} = \sigma_{3j} e_j = \sigma_{31} e_1 + \sigma_{32} e_2 + \sigma_{33} e_3 = 10j + 18k$$

ب)

$$n\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

$$\overset{n}{T}_i = \sigma_{ji} n_j = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3$$
$$= 15\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 5\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

$$\overset{n}{T}_i = \sigma_{ji} n_j = \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{32} n_3$$
$$= -5\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 20\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 10\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{25}{\sqrt{3}}$$

$$\overset{n}{T}_i = s_{ji} n_j = s_{13} n_1 + s_{23} n_2 + s_{33} n_3$$
$$= 10\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 18\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{28}{\sqrt{3}}$$
$$\overset{n}{T} = \overset{n}{T}_1 i + \overset{n}{T}_2 j + \overset{n}{T}_3 k = \frac{10}{\sqrt{3}} i + \frac{25}{\sqrt{3}} j + \frac{28}{\sqrt{3}} k$$

ج)

$$n\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \quad \Rightarrow \quad \overset{n}{T} = \frac{10}{\sqrt{3}} i + \frac{25}{\sqrt{3}} j + \frac{28}{\sqrt{3}} k$$

د)

$$\overset{n}{T}_i = s_{ji} n_j = s_{11} n_1 + s_{21} n_2 + s_{31} n_3$$
$$= 15\left(\frac{1}{2}\right) - 5\left(\frac{1}{2}\right) = 5$$

$$\overset{n}{T}_i = s_{ji} n_j = s_{12} n_1 + s_{22} n_2 + s_{32} n_3$$
$$= -5\left(\frac{1}{2}\right) + 20\left(\frac{1}{2}\right) + 10\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{15 + 10\sqrt{2}}{2}$$

$$\overset{n}{T}_i = s_{ji} n_j = s_{13} n_1 + s_{23} n_2 + s_{33} n_3$$
$$= 10\left(\frac{1}{2}\right) + 18\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 5 + 9\sqrt{2}$$

$$\overset{n}{T} = \overset{n}{T}_1 i + \overset{n}{T}_2 j + \overset{n}{T}_3 k = 5i + \left(\frac{15 + 10\sqrt{2}}{2}\right) j + (5 + 9\sqrt{2}) k$$

$$s_n = \overset{n}{T} \cdot n = (5)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{15 + 10\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + (5 + 9\sqrt{2})\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= \frac{61}{4} + \frac{10\sqrt{2}}{2} = \frac{61 + 20\sqrt{2}}{4} \, (KN / cm^2)$$

$$t_n^2 = \left|\overset{n}{T}\right|^2 - s_n^2 \Rightarrow t_n = 7.3(KN/cm^2)$$

2-1) وضعیت تنش در یک جسم الاستیک به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} x_1 & 4x_1 & 4x_2 \\ 4x_1 & x_2 & 0 \\ 4x_2 & 0 & x_3 \end{bmatrix}$$

بردار تنش را در نقطه ای با مختصات یکسان بر روی سطحی با معادله $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9$ بیابید.

حل:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 9 = 0$$

$$\nabla f\left[i\frac{\partial}{\partial x_1} + j\frac{\partial}{\partial x_2} + k\frac{\partial}{\partial x_3}\right]\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 9\right) = 2x_1 i + 2x_2 j + 2x_3 k$$

$$x_1 = x_2 = x_3 = \sqrt{3}$$

$$\nabla f(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}i + 2\sqrt{3}j + 2\sqrt{3}k$$

$$n(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}) = \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$$

$$s(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}) = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 4\sqrt{3} & 4\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ 4\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\overset{n}{T}_i = s_{ji} n_j = s_{11} n_1 + s_{21} n_2 + s_{31} n_3$$

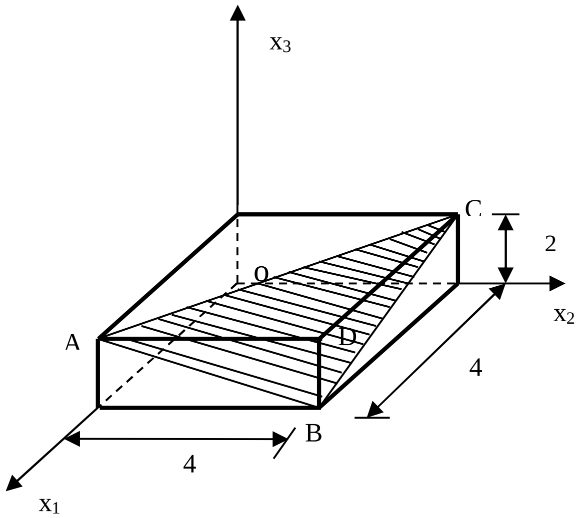
$$= (\sqrt{3})(\frac{\sqrt{3}}{3}) + (4\sqrt{3})(\frac{\sqrt{3}}{3}) + (4\sqrt{3})(\frac{\sqrt{3}}{3}) = 9$$

$$\overset{n}{T}_i = s_{ji} n_j = s_{12} n_1 + s_{22} n_2 + s_{32} n_3 = (4\sqrt{3})(\frac{\sqrt{3}}{3}) + (\sqrt{3})(\frac{\sqrt{3}}{3}) = 5$$

$$\overset{n}{T}_i = s_{ji} n_j = s_{13} n_1 + s_{23} n_2 + s_{33} n_3 = (4\sqrt{3})(\frac{\sqrt{3}}{3}) + (\sqrt{3})(\frac{\sqrt{3}}{3}) = 5$$

$$\overset{n}{T} = \overset{n}{T}_1 i + \overset{n}{T}_2 j + \overset{n}{T}_3 k = 9i + 5j + 5k$$

3-1) وضعیت تنش در یک جسم الاستیک همان وضعیت ارائه شده در مسئله 1-2 است. مولفه عمودی بردار تنش بر روی سطح ABC شکل زیر را در نقطه محل تقاطع OD و سطح ABC بدست آورید.



حل:

A(4,0,2)   B(4,4,0)   C(0,4,2)

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-0 & z-2 \\ 4-4 & 4-0 & 0-2 \\ 0-4 & 4-0 & 2-2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-4)(8) + (y-0)(+8) + (z-2)(16) = 0$$

$$S_{ABC} : x + y + 2z = 8$$

O(0,0,0)   D(4,4,2)

$$\overline{OD} : \frac{x-0}{4-0} = \frac{y-0}{4-0} = \frac{z-0}{2-0} \rightarrow x = y = 2z$$

نقطه تلاقی $E:(\frac{8}{3},\frac{8}{3},\frac{4}{3})$

$$\nabla f(S_{ABC}) = i + j + 2k$$
$$n(\frac{8}{3},\frac{8}{3},\frac{4}{3}) = \frac{1}{\sqrt{6}} i + \frac{1}{\sqrt{6}} j + \frac{2}{\sqrt{6}} k$$

$$s(\frac{8}{3},\frac{8}{3},\frac{4}{3}) = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & \frac{32}{3} & \frac{32}{3} \\ \frac{32}{3} & \frac{8}{3} & 0 \\ \frac{32}{3} & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$s_n = s_{ij} n_j n_i = s_{11} n_1 n_1 + s_{12} n_2 n_1 + s_{13} n_3 n_1 + s_{21} n_1 n_2$$
$$+ s_{22} n_2 n_2 + s_{23} n_3 n_2 + s_{31} n_1 n_3 + s_{32} n_2 n_3 + s_{33} n_3 n_3$$
$$= (\frac{8}{3})(\frac{1}{\sqrt{6}})^2 + (\frac{8}{3})(\frac{1}{\sqrt{6}})^2 + (\frac{4}{3})(\frac{2}{\sqrt{6}})^2 + 2\times(\frac{32}{3})(\frac{1}{\sqrt{6}})(\frac{1}{\sqrt{6}})$$
$$+ 2\times(\frac{32}{3})(\frac{1}{\sqrt{6}})(\frac{2}{\sqrt{6}}) = \frac{112}{9}$$

4-1) در نقطه ای از یک جسم الاستیک تحت تنش، دو راستای مختلف با بردارهای یکه n و m را در نظر گرفته و بردارهای تنش بر روی سطوح عمود بر این دو راستا را به ترتیب $\overset{n}{T}$ و $\overset{m}{T}$ بنامید. تایید کنید مولفه $\overset{n}{T}$ در راستای m مساوی مولفه $\overset{m}{T}$ در راستای n است.

حل:

حکم: $\overset{n}{T}\cdot m = \overset{m}{T}\cdot n$

$$\overset{n}{T} = \overset{n}{T}_i e_i = s_{ji} n_j e_i$$
$$\overset{m}{T} = \overset{m}{T}_i e_i = s_{ji} m_j e_i$$

$$\overset{n}{T}\cdot m = s_{ji} n_j m_i \quad (1) \qquad \overset{m}{T}\cdot n = s_{ji} m_j n_i = s_{ji} n_j m_i \quad (2)$$

$$s_{ij} = s_{ji} \xrightarrow{(1),(2)} \overset{n}{T}.m = \overset{m}{T}.n$$

5-1) تانسور تنش در نقطه ای از جسم تحت تنش بصورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} -6 & 6 & 1 \\ 6 & 20 & -8 \\ 1 & -8 & 10 \end{bmatrix} kN/cm^2$$

مطلوبست:

الف) تعیین تنش های عمودی ماکزیمم و بردار یکه سطوح مربوطه.

ب) تعیین تنش های برشی ماکزیمم و بردار یکه سطوح مربوطه.

ج) تایید تغییر ناپذیرهای تنش با استفاده از نتایج حاصل.

حل:

الف)

$$s^3 - I_1 s^2 + I_2 s + I_3 = 0$$
$$I_1 = s_{11} + s_{22} + s_{33} = -6 + 20 + 10 = 24$$
$$I_2 = s_{11}s_{22} + s_{22}s_{33} + s_{33}s_{11} - \left[s_{12}^2 + s_{23}^2 + s_{31}^2\right]$$
$$= (-6)(20) + (20)(10) + (-6)(10) - \left[(6)^2 + (-8)^2 + (1)^2\right] = -81$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 6 & 1 \\ 6 & 20 & -8 \\ 1 & -8 & 10 \end{vmatrix} =$$
$$(-6)(200-64) - (6)(60+8) + (1)(-48-20) = -1292$$
$$s^3 - 24s^2 - 81s + 1292 = 0$$
$$s_1 = 25.1791(KN/cm^2),$$
$$s_2 = 6.5980(KN/cm^2),$$
$$s_3 = -7.7770(KN/cm^2)$$

$$\begin{bmatrix} -31.179 & 6 & 1 \\ 6 & -5.179 & -8 \\ 1 & -8 & -15.179 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overset{(1)}{n}_1 \\ \overset{(1)}{n}_2 \\ \overset{(1)}{n}_3 \end{bmatrix} = 0 \qquad , \begin{bmatrix} (1) \\ n_1 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} (1) \\ n_2 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} (1) \\ n_3 \end{bmatrix}^2 = 1$$

$$\overset{(1)}{n} = \begin{bmatrix} \pm 0.1545 \\ \pm 0.8782 \\ \mathbf{m}\, 0.4527 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -12.598 & 6 & 1 \\ 6 & 13.402 & -8 \\ 1 & -8 & 3.402 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overset{(2)}{n}_1 \\ \overset{(2)}{n}_2 \\ \overset{(2)}{n}_3 \end{bmatrix} = 0 \qquad , \begin{bmatrix} (2) \\ n_1 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} (2) \\ n_2 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} (2) \\ n_3 \end{bmatrix}^2 = 1$$

$$\overset{(2)}{n} = \begin{bmatrix} \pm 0.2625 \\ \pm 0.4052 \\ \pm 0.8757 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.777 & 6 & 1 \\ 6 & 27.777 & -8 \\ 1 & -8 & 17.777 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overset{(3)}{n}_1 \\ \overset{(3)}{n}_2 \\ \overset{(3)}{n}_3 \end{bmatrix} = 0 \qquad , \begin{bmatrix} (3) \\ n_1 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} (3) \\ n_2 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} (3) \\ n_3 \end{bmatrix}^2 = 1$$

$$\overset{(3)}{n} = \begin{bmatrix} -.9524 \\ 0.2541 \\ 0.1679 \end{bmatrix}$$

ب)

$$t_2 = \frac{1}{2}(s_1 - s_3) = \frac{1}{2}[25.1791 - (-7.777)] = 16.478(KN/cm^2)$$

$$t_3 = \frac{1}{2}(s_1 - s_2) = \frac{1}{2}[25.1791 - 6.598] = 9.2905(KN/cm^2)$$

$$t_1 = \frac{1}{2}(s_2 - s_3) = \frac{1}{2}[6.598 - (-7.777)] = 7.1875(KN/cm^2)$$

همانطور که سه سطح متعامد تنش عمودی max وجود دارد، سه سطح متعامد تنش برشی نیز وجود دارد که زاویه این سطوح نسبت به سطوح اصلی $\pi/4$ است. پس برای پیدا کردن بردار نرمال سطحی با تنش برشی τ_1 Max می بایست بردارهای نرمال n_2 , n_3 را جمع کرده و آن را به صورت بردار یکه بدست آورد.

تنش برشی max مساوی نصف اختلاف بین بزرگترین و کوچکترین تنش های عمودی است و روی سطحی عمل می کند که نسبت به سطوح این دو تنش اصلی، زاویه $\pm p/4$دارد.

$$\overset{(2)}{n}+\overset{(3)}{n}=\begin{bmatrix}0.2625\\0.4052\\0.8757\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-.9524\\0.2541\\0.1679\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.6899\\0.6593\\1.0436\end{bmatrix}$$

$$\overset{(1)}{p}=\begin{bmatrix}-0.6899\\0.6566\\1.0436\end{bmatrix}\times\frac{1}{1.4141}\Rightarrow\overset{(1)}{p}=\begin{bmatrix}-0.4879\\0.4662\\0.738\end{bmatrix}$$

$$\overset{(1)}{n}+\overset{(3)}{n}=\begin{bmatrix}-0.1545\\-0.8782\\0.4527\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-0.9524\\0.2541\\0.1679\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1.1069\\-0.6241\\0.6206\end{bmatrix}$$

$$\overset{(2)}{p}=\begin{bmatrix}-1.1069\\-0.6241\\0.6206\end{bmatrix}\times\frac{1}{1.4141}\Rightarrow\overset{(2)}{p}=\begin{bmatrix}-0.8728\\-0.4413\\0.4389\end{bmatrix}$$

$$\overset{(1)}{n}+\overset{(2)}{n}=\begin{bmatrix}-0.1545\\-0.8782\\0.4527\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.2625\\0.4052\\0.8757\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.108\\-0.473\\1.3284\end{bmatrix}$$

$$\overset{(2)}{p}=\begin{bmatrix}0.108\\-0.473\\1.3284\end{bmatrix}\times\frac{1}{1.4141}\Rightarrow\overset{(3)}{p}=\begin{bmatrix}0.0764\\-0.3345\\0.9394\end{bmatrix}$$

ج)

$$I_1 = s_1 + s_2 + s_3 = 25.1791 + 6.598 - 7.777 = 24 \quad ok$$

$$I_2 = s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1 = (25.1791)(6.598) + (6.598)(-7.777)$$
$$+ (-7.777)(25.1791) = -81 \quad ok$$

$$I_3 = s_1 s_2 s_3 = (25.1791)(6.598)(-7.777) = -1292 \quad ok$$

6-1) معادل بودن روابط زیر را برای تغییر ناپذیر J_2 تایید کنید.

حل:

$$J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}$$

$$J_2 = \frac{1}{6}\left[(s_1 - s_2)^2 + (s_2 - s_3)^2 + (s_3 - s_1)^2\right]$$

$$J_2 = \frac{1}{6}\left[(s_{11} - s_{22})^2 + (s_{22} - s_{33})^2 + (s_{33} - s_{11})^2 + 6(s_{12}^2 + s_{23}^2 + s_{31}^2)\right]$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{22} & S_{23} \\ S_{32} & S_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{11} & S_{13} \\ S_{31} & S_{33} \end{vmatrix}$$
$$= (S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}) + (S_{22}S_{33} - S_{23}S_{32}) + (S_{33}S_{11} - S_{31}S_{13})$$
$$= S_{11}S_{22} + S_{22}S_{33} + S_{33}S_{11} - (S_{12}^2 + S_{23}^2 + S_{31}^2) \qquad (1)$$

$$J_2 = \frac{1}{6}(2I_1^2 - 6I_2)$$

$$\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} = \frac{1}{2}(S_{ii}S_{jj} - S_{ij}S_{ij})$$
$$= \frac{1}{2}(S_{11}S_{jj} + S_{22}S_{jj} + S_{33}S_{jj} - S_{1j}S_{1j} - S_{2j}S_{2j} - S_{3j}S_{3j})$$

$$=\frac{1}{2}(S_{11}S_{11}+S_{11}S_{22}+S_{11}S_{33}+S_{22}S_{11}+S_{22}S_{22}$$
$$+S_{22}S_{33}+S_{33}S_{11}+S_{33}S_{22}+S_{33}S_{33}$$
$$-S_{11}S_{11}-S_{12}S_{12}-S_{13}S_{13}-S_{21}S_{21}-S_{22}S_{22}$$
$$-S_{23}S_{23}-S_{31}S_{31}-S_{32}S_{32}-S_{33}S_{33})$$
$$=\frac{1}{2}(2S_{11}S_{22}+2S_{22}S_{33}+2S_{33}S_{11}-2S_{12}^2-2S_{23}^2-2S_{31}^2)$$
$$=S_{11}S_{22}+S_{22}S_{33}+S_{33}S_{11}-(S_{12}^2+S_{23}^2+S_{31}^2) \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} J_2=\frac{1}{2}S_{ij}S_{ij}$$

$$S_1=s_1-s_m \quad ,$$
$$S_2=s_2-s_m \quad , \quad S_3=s_3-s_m$$

$$J_2=\frac{1}{2}S_{ij}S_{ij}=\frac{1}{2}(S_1^2+S_2^2+S_3^2)$$

$$J_2=\frac{1}{2}\left[(s_1-s_m)^2+(s_2-s_m)^2+(s_3-s_m)^2\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[(s_1^2+s_2^2+s_3^2)+3s_m^2-2s_m(s_1+s_2+s_3)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[(s_1^2+s_2^2+s_3^2)+3s_m^2-6s_m^2\right]=\frac{1}{2}\left[(s_1^2+s_2^2+s_3^2)-3s_m^2\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[(s_1^2+s_2^2+s_3^2)-\frac{1}{3}(s_1+s_2+s_3)^2\right]$$
$$=\frac{1}{6}\left[3(s_1^2+s_2^2+s_3^2)-(s_1^2+s_2^2+s_3^2)-2(s_1s_2+s_2s_3+s_3s_1)\right]$$
$$=\frac{1}{6}\left[2(s_1^2+s_2^2+s_3^2)-2(s_1s_2+s_2s_3+s_3s_1)\right]$$
$$=\frac{1}{6}\left[(s_1-s_2)^2+(s_2-s_3)^2+(s_3-s_1)^2\right]$$

$$J_2=\frac{1}{6}\left[(S_1-S_2)^2+(S_2-S_3)^2+(S_3-S_1)^2\right]$$
$$=\frac{1}{6}\left[2(S_1^2+S_2^2+S_3^2)-2(S_1S_2+S_2S_3+S_3S_1)\right]$$
$$=\frac{1}{6}\left[2(S_1+S_2+S_3)^2-4(S_1S_2+S_2S_3+S_3S_1)\right.$$
$$\left.-2(S_1S_2+S_2S_3+S_3S_1)\right]$$
$$=\frac{1}{6}\left[2(S_1+S_2+S_3)^2-6(S_1S_2+S_2S_3+S_3S_1)\right]$$
$$=\frac{1}{6}\left[2(S_{11}+S_{22}+S_{33})^2-6(S_{11}S_{22}+S_{22}S_{33}+S_{33}S_{11})\right.$$
$$\left.+6(S_{12}^2+S_{23}^2+S_{31}^2)\right]$$
$$=\frac{1}{6}\left[2(S_{11}^2+S_{22}^2+S_{33}^2)-2(S_{11}S_{22}+S_{22}S_{33}+S_{33}S_{11})\right.$$
$$\left.+6(S_{12}^2+S_{23}^2+S_{31}^2)\right]$$
$$=\frac{1}{6}\left[(S_{11}-S_{22})^2+(S_{22}-S_{33})^2+(S_{33}-S_{11})^2+6(S_{12}^2+S_{23}^2+S_{31}^2)\right]$$

$$J_2=\frac{1}{6}\left[(S_1-S_2)^2+(S_2-S_3)^2+(S_3-S_1)^2\right]$$
$$=\frac{1}{6}\left[2(S_1^2+S_2^2+S_3^2)-2(S_1S_2+S_2S_3+S_3S_1)\right]$$
$$=\frac{1}{6}\left[2(S_1+S_2+S_3)^2-4(S_1S_2+S_2S_3+S_3S_1)\right.$$
$$\left.-2(S_1S_2+S_2S_3+S_3S_1)\right]$$
$$=\frac{1}{6}\left[2(S_1+S_2+S_3)^2-6(S_1S_2+S_2S_3+S_3S_1)\right]=$$
$$=\frac{1}{6}(2I_1^2-6I_2)$$

7-1) معادل بودن روابط زیر را برای $\bar{t}$ تایید کنید.($\bar{t}$ تنش برشی هشت وجهی است).

$$\bar{t}^2 = \frac{1}{9}\left[(s_1 - s_2)^2 + (s_2 - s_3)^2 + (s_3 - s_1)^2\right]$$
$$\bar{t}^2 = \frac{1}{3}\left[(s_1 - s_m)^2 + (s_2 - s_m)^2 + (s_3 - s_m)^2\right]$$

حل:

بدین منظور یکی از صفحات هشت وجهی را منطبق بر یکی از کنج های دستگاه مختصات طوری انتخاب می کنیم که از سه نقطه (1,0,0) و (0,1,0) و (0,0,1) بگذرد. سپس بردار نرمال این صفحه را پیدا کرده و حل مسئله را ادامه می دهیم.

$$n:\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow n_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, n_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, n_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$t_n^2 = n_1^2 n_2^2 (s_1 - s_2)^2 + n_2^2 n_3^2 (s_2 - s_3)^2 + n_3^2 n_1^2 (s_3 - s_1)^2$$
$$\bar{t}_n^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 (s_1 - s_2)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 (s_2 - s_3)^2$$
$$+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 (s_3 - s_1)^2$$
$$\bar{t}_n^2 = \frac{1}{9}\left[(s_1 - s_2)^2 + (s_2 - s_3)^2 + (s_3 - s_1)^2\right]$$

$$\{a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)\}$$

$$\frac{1}{3}\left[(s_1 - s_m)^2 + (s_2 - s_m)^2 + (s_3 - s_m)^2\right]$$
$$= \frac{1}{3}\Big[(s_1 + s_2 + s_3 - 3s_m)^2$$
$$-2\left[(s_1 - s_m)(s_2 - s_m) + (s_2 - s_m)(s_3 - s_m) + (s_3 - s_m)(s_1 - s_m)\right]\Big]$$
$$= -\frac{2}{3}\left[(s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1) - 2s_m(s_1 + s_2 + s_3) + 3s_m^2\right]$$
$$= -\frac{2}{3}\left[(s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1) - 3s_m^2\right]$$
$$= -\frac{2}{3}\left[(s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1) - \frac{1}{3}(s_1 + s_2 + s_3)^2\right]$$

$$=\frac{2}{9}\left[-3\left(s_1 s_2+s_2 s_3+s_3 s_1\right)+\left(s_1^2+s_2^2+s_3^2\right)\right.$$
$$\left.+2\left(s_1 s_2+s_2 s_3+s_3 s_1\right)\right]$$
$$=\frac{1}{9}\left[2\left(s_1^2+s_2^2+s_3^2\right)-2\left(s_1 s_2+s_2 s_3+s_3 s_1\right)\right]$$
$$=\frac{1}{9}\left[\left(s_1-s_2\right)^2+\left(s_2-s_3\right)^2+\left(s_3-s_1\right)^2\right]=\bar{t}^2$$
$$\Rightarrow \bar{t}^2=\frac{1}{3}\left[\left(s_1-s_m\right)^2+\left(s_2-s_m\right)^2+\left(s_3-s_m\right)^2\right]$$

8-1) آیا با داشتن تنش های اصلی و راستاهای مربوطه می توان تنش های اصلی انحرافی و راستاهای آنها را تعیین نمود؟ توضیح دهید چگونه.

حل:

$$s_m=\frac{1}{3}\left(s_{11}+s_{22}+s_{33}\right)$$

$$I_1=s_1+s_2+s_3 \qquad , \qquad I_1=s_{11}+s_{22}+s_{33}$$

$$\Rightarrow s_{11}+s_{22}+s_{33}=s_1+s_2+s_3$$
$$s_m=\frac{1}{3}\left(s_1+s_2+s_3\right)$$

$$S_1=s_1-s_m \qquad S_2=s_2-s_m \qquad S_3=s_3-s_m$$

مقادیر s_1,s_2,s_3 همان مقادیر تنش های اصلی انحرافی هستند.

بایستی ثابت شود که جهات تنش های اصلی انحرافی با جهات تنش های اصلی مطابق هستند:

$$\begin{bmatrix} s_{11}-s_m-(S_i) & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22}-s_m-(S_i) & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33}-s_m-(S_i) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overset{(i)}{n_1} \\ \overset{(i)}{n_2} \\ \overset{(i)}{n_3} \end{bmatrix}=0$$

$$S_i=s_i-s_m$$

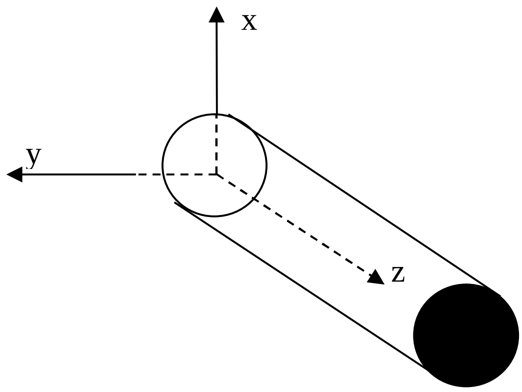
حال با جایگذاری مقدار s_i در معادله فوق خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} S_{11}-S_i & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22}-S_i & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33}-S_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{(i)}{n_1} \\ \overset{(i)}{n_2} \\ \overset{(i)}{n_3} \end{bmatrix} = 0$$

با حل معادله فوق جهات تنش های اصلی σ_i به دست می آید. پس جهات تنش های اصلی انحرافی با جهات تنش های اصلی مطابق هستند.

9-1) تانسور تنش برای محور نشان داده شده در شکل زیر چنین است:

$$\begin{bmatrix} 0 & -Gfz & Gfy \\ -Gfz & 0 & 0 \\ Gfy & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



به طوری که G مدول برشی و Φ ضریب ثابتی است. نشان دهید دیواره جانبی این محور، آزاد از نیرو است. در مورد منتجه بردار تنش در روی مقطع عرضی محور بحث کنید.

حل:

$$y^2 + z^2 = R^2$$

$$f(x,y,z) = y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

$$\nabla f = (2y)j + (2z)k$$

$$n = \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}\, j + \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\, k$$